

آنتوان ستوتزل

باز شناخت اراده عمومی*

اراده عمومی را چگونه می توان باز شناخت ؟ این سؤال اصلی هر کشوری است که براساس دموکراسی اداره می شود . ولی ظاهراً " سئوالی ساده لوحانه است ، زیرا کافی است به رای گیری مبادرت کرد و اراده عمومی را ، با انتخابی که اکثریت آراء رابه دست می دهد ، اعلام کرد .

وقتی که " انتخابها " میان دو چیز باشد ، وقتی که باید میان جمهور ریخواهان و دموکراتها ، میان " ویگ " (Whigs) و " توری " (Tories) صلح و جنگ ، تسلیم یا پایداری انتخاب کرد ، شیوه رای گیری مطمئن است .

* این مقاله ترجمه متن سخنرانی آنتوان ستوتزل (Antoine STOETZEL) است که در ۲۳ آوریل ۱۹۷۵ در دانشگاه لبنان در بیروت ایراد شده و در " مجله جامعه شناسی فرانسه " به مشخصات زیر چاپ شده است :

Antoine Stoetzel " Comment reconnaitre la 'Volonté - générale", Revue Française de Sociologie, XVII, No1, 1976

افسوس که این دانشمند جوان که بتازگی زندگی دانشگاهی خود را پس از یک دوره تحصیلی طولانی و درخشان درمؤسسه پلی تکنیک فرانسه - در سربون و دانشگاه هاروارد - آغاز کرده بود اول سپتامبر ۱۹۷۵ در یک حادثه هوایی که هدایت هواپیما را خود بر عهده داشت به هلاکت رسید . من ترجمه این مقاله را به پاس قدر شناسی به پدرش Jean Stoetzel که سالها افتخار شاگردی اش را در سربون داشتم تقدیم می کنم .

اما همین که لااقل سه " انتخاب شدنی " و سه انتخاب کننده در پیش باشد وضعیت فرق می کند . و اما در امور سیاسی ، اقتصادی و اجتماعی عموماً " با سه انتخاب یا بیشتر سروکار داریم . کندرسه (Condorcet) بنظر می رسد اولین کسی باشد که مشکل را گوشزد کرده است . و شاید شناخت کارهای او سازمان انتخابات ریاست جمهوری فرانسه را به صرافت انداخته است که در دور دوم فقط دو نامزد در برابر یکدیگر قرار گیرند .

الف - کارهای کندرسه

۱- " پارادکس " (۱) کندرسه (۱۷۹۴ - ۱۷۴۳)

بهنگام انقلاب کبیر ، زمانی که فرانسه صاحب اولین قانون اساسی دموکراتیک خود می شد ، مارکی دو کندرسه عمیقاً " به مسئله "قاعده اکثریت اندیشیده بود . او از " پارادکس " عجیبی شگفت زده شده بود : همین که بیش از دو نامزد (یا دو انتخاب شدنی) در برابر هم باشند ، امکان دارد نامزدی که اکثریت را بدست می آورد همانی نباشد که از سوی انتخاب کنندگان ترجیح داده شده است .

یک مثال فرضی و ساده در نظر بگیریم . صد و پنجاه انتخاب کننده باید میان سه نامزد آندره ، برنارد و شارل انتخاب کنند . همه عقیده‌ای ابراز کرده اند . نتایج بدست آمده عبارتند از : آندره ۴۰ رأی برنارد ۳۵ رأی ، شارل ۳۰ رأی ، مجموع ۱۰۵ رأی . اکثریت معلوم است - یا لااقل این طور به نظر می رسد . آندره انتخاب شده ، حال آنکه در حقیقت شارل است که ترجیح داده شده است . چگونه چنین چیزی ممکن است ؟ ما ترجیح ۱۰۵ انتخاب کننده را می شناسیم . ده انتخاب کننده آندره را به برنارد و برنارد را به شارل ترجیح داده اند ، ترکیب ABC . سی انتخاب کننده آندره را به شارل و شارل را به برنارد ترجیح داده اند ، ترکیب ACB ، و غیره . جدول کامل ترجیحات ۱۰۵ انتخاب کننده را برای سه نامزد ، که از اینجا به بعد آنها را به اختصار A, B, C خواهیم نامید ، می نویسیم .

۱- Paradoxe ، که می توان آن را " تناقض " یا " ناسازگاری " ترجمه کرد . - م .

شش وضعیت برای ترتیب سه انتخاب شونده مثل A, B, C وجود دارد که عبارتند از: ۱- ABC ، ۲- ACB ، ۳- BAC ، ۴- BCA ، ۵- CAB ، ۶- CBA ، افرادی که این انتخابها را کرده اند N_1 ، N_2 ، N_3 و غیره ، جمع عددیشان بصورت زیر است :

۱-	ABC	N_1	۱۰
۲-	ACB	N_2	۳۰
۳-	BAC	N_3	۱۰
۴-	BCA	N_4	۲۵
۵-	CAB	N_5	۱۰
۶-	CBA	N_6	۲۰
جمع			۱۰۵

انتخاب شده است چونکه ترکیب ABC و ACB در مجموع $N_1 + N_2$ یعنی $۴۰ = ۱۰ + ۳۰$ بوده است .

$$N_3 + N_4 = ۱۰ + ۲۵ = ۳۵ \quad \text{B دوم است چون:}$$

$$N_5 + N_6 = ۱۰ + ۲۰ = ۳۰ \quad \text{C سوم است چون:}$$

مع هذا جزئیات این انتخابها را بررسی کنیم .

در ترکیبهای ABC ، ACB و CAB می بینیم که A به B ترجیح داده شده است ، یعنی بوسیله افراد $۵۰ = ۱۰ + ۳۰ + ۱۰ = N_1 + N_2 + N_3$ در همان نگاه اول معلوم می شود که ۵۵ نفر B را به A ترجیح داده اند زیرا جمع انتخاب کنندگان ۱۰۵ است ، $۱۰۵ - ۵۰ = ۵۵$ ، یعنی در ترکیبهای BAC و BCA ، CBA ، B به A ترجیح داده شده است ، یعنی بوسیله افراد زیر

$$N_3 + N_4 + N_6 = ۱۰ + ۲۵ + ۲۰ = ۵۵$$

بنابراین B می تواند قبل از A قرار گیرد .

اما C هم به B ترجیح داده شده است ، بصورت زیر :

$$N_2 + N_5 + N_6 = ۳۰ + ۱۰ + ۲۰ = ۶۰$$

در حالی که فقط ۴۵ نفر B را به C ترجیح دادند . همچنین C به A ترجیح داده شده است :

$$N_4 + N_5 + N_6 = 25 + 10 + 20 = 55$$

در حالی که فقط ۵۰ نفر A را به B ترجیح داده اند . در نتیجه چون B به A ترجیح داده شده و C به B و A ترجیح داده شده ، ترتیب فراوانی ارجحیت بصورت A ، B ، C خواهد بود (از چپ به راست) . نامزد A که بنا به قاعده اکثریت اول قرار می گرفت بنا به ترتیب ارجحیت نفر آخر قرار می گیرد و C که نفر آخر بود نفر اول می شود . این از یک آیه انجیلی حاصل نشده است ، بلکه بایک محاسبه عقل سلیم معلوم می گردد . این همان چیزی است که "پارادکس کندرسه" نامیده می شود .

۲- پیشنهاد بوردا (۱۷۹۹ - ۱۷۳۳)

بوردا (BORDA) ، ریاضیدان معاصر کندرسه ، پیشنهاد می کرد که از انتخاب کنندگان خواسته شود به نامزدها نمره بدهند . با دادن نمره ۳ به نفر اول ، نمره ۲ به نفر دوم و نمره ۱ به نفر سوم ، این روش را بیازماییم . نامزد منتخب کسی خواهد بود که مجموع نمراتش از همه بیشتر باشد . مثلا "ترکیب ABC که ۱۰ بار انتخاب شده بود برای نامزدهای A و B ، C ، به ترتیب نمرات زیر را خواهد داشت : A : ۳۰ ، B : ۲۰ ، C : ۱۰ . جدول کامل به صورت زیر خواهد بود :

ترکیب	تعداد انتخاب کنندگان	نمره نامزدها		
		A	B	C
ABC	۱۰	۳۰	۲۰	۱۰
ACB	۳۰	۹۰	۳۰	۶۰
BAC	۱۰	۲۰	۳۰	۱۰
BCA	۲۵	۲۵	۷۵	۵۰
CAB	۱۰	۲۰	۱۰	۳۰
CBA	۲۰	۲۰	۴۰	۶۰
جمع	۱۰۵	۲۰۵	۲۰۵	۲۲۰

این بار هم C نفر اول قرار می گیرد ، ولی A و B برابرنند . این نتیجه هم از نتیجه بدست آمده با قاعده اکثریت متفاوت است و هم از نتیجه‌ای که با ترتیب ارجحیت بدست آمده بود .

بدین ترتیب معلوم می شود بهنگام تدوین یک قانون اساسی و یا یک قانون انتخاباتی چه دقایقی را باید در نظر گرفت .

۳- حالت کندرسه

اما ، چنانکه گویی جریان امور هنوز بقدر کفایت پیچیده و بفرنج نشده است ، کندرسه نشان داد که عملاً " حالاتی وجود دارد که بعد از تحلیل ارجحیتها باز هم نمی توان هیچ تصمیمی درباره آنها گرفت . این چیزی است که حالت کندرسه نامیده می شود . برگردیم به جدول ترکیبها و برای تسریع ، اعداد را اندکی تغییر می دهیم ، چون حالا دیگر با مسئله کم و بیش آشنا هستیم ، همان ۱۰۵ نفر انتخاب کننده و ۳ نفر نامزد A ، B ، C هستند . جدول جدید به صورت زیر خواهد بود :

ABC	N_1	۱۰
ACB	N_2	۳۰
BAC	N_3	۲۰
BCA	N_4	۱۵
CAB	N_5	۱۰
CBA	N_6	۲۰

بنا به قاعده اکثریت :

A ۴۰ رأی دارد

B ۳۵ رأی دارد

C ۳۰ رأی دارد

و ترتیب اکثریت آن چنین است : $A \succ B \succ C$

و بنا به اصل پیشنهادی بوردا ، داریم $A : 215$ ، $C : 210$ ، $B : 205$ یعنی $A \succ C \succ B$ ، (۲) ولی اگر اصل ارجحیت آراء را در نظر بگیریم چنین خواهیم داشت :

$C \succ B \succ A$. حالا آن را بر مبنای ترتیب ارجحیت نشان دهیم ، با توجه به اینکه

(۲) علامت \succ خوانده شود : " ترجیح داده شد به " .

به محض آنکه مجموع اعداد از نصف کل یعنی از $52/5$ متجاوز شد ارجحیت محرز است .
بنابراین خواهیم داشت :

$$A \succ C \text{ بوسیله } N_1 + N_2 + N_3 = 10 + 30 + 20 = 60$$

$$C \succ B \text{ بوسیله } N_2 + N_5 + N_6 = 30 + 10 + 20 = 60$$

$$B \succ A \text{ بوسیله } N_3 + N_4 + N_6 = 10 + 25 + 20 = 55$$

که ترتیب ارجحیت چنین خواهد بود : گروه A را به C و C را به B^۳ و B را به C ترجیح داده است . متذکر شویم که هیچ فردی رأی باطلی چون ترجیح A به B و B به A در عین حال نداده است . در بیان ریاضی ، همه^۶ ترجیحات متعدی (transitive) هستند ، در حالی که ترجیح اجتماعی چنین نیست . ما در برابر " حالت کندرسه " هستیم . هر بار که " حالت کندرسه " واقع شود نمی توان ترجیح اجتماعی یعنی اراده^۶ عمومی را تعیین کرد .

ب - قضیه^۶ آرو (Le théorème d'Arrow)

بدیهی است که برای نشان دادن " حالت کندرسه " ما اعدادی را انتخاب کردیم که چنین وضعی را ایجاد می کند ، و می توان از خود سؤال کرد که آیا چنین وضعی فراوان است . در جواب باید بگوییم آری ، زیرا محاسبه شده است که با سه نامزد " حالت کندرسه " در $5/6$ حالات پدید می آید چنانچه سه انتخاب کننده وجود داشته باشد ، و بطور منظم تا $8/8$ افزایش می یابد وقتی که تعداد انتخاب کننده عملاً " بینهایت " باشد . باید پذیرفت که چنین نسبتی قابل اغماض نیست و اهمیتش بیش از آن است که قانونگذار آن را نادیده انگارد .

به همین دلیل ، باید دید قانونگذار چه قواعدی را باید در قانون اعلام کند تا از بروز حالت کندرسه اجتناب شود ، یعنی مواردی که در آنها تعیین اراده^۶ عمومی غیر ممکن می گردد . در اینجا است که اهمیت خلق یک اثر اساسی در سال ۱۹۵۱ توسط یک ریاضیدان نابغه و برنده^۶ جایزه نوبل ۱۹۷۲ کنت جی . آرو (Kenneth J. Arrow) ، که من در سال ۱۹۷۰ افتخار شاگردیش را داشتم . آشکار می شود .
قضیه^۶ آرو موضوع کتاب " انتخاب اجتماعی و ترجیحات فردی " (۲) است .

3- Social Choice and Individual Values

که تحت عنوان زیر به فرانسه ترجمه شده است :

Choix Collectif et Preference individuelles, Paris,
Calmann-Levy, 1974. 236 p.

این اثر باعث وانگیزه^۶ کارهای متعددی ، مخصوصاً " نزد شاگردان ارو که استاد علوم اقتصادی دانشگاه هاروارد است ، شده است .

قضیه^۶ ارو نه در صورت مسئله اش ساده است و نه در راه حلش . اجمالاً " معنایش این است که اگر قبول قواعد نا معقول یا حیرت انگیز برای تعیین ترجیح اجتماعی منع شود ، غیرممکن است حتی یک قاعده^۶ انتخاباتی پیدا کرد که در همه^۶ حالات تعیین اراده^۶ عمومی را تضمین کند .

۱- قاعده^۶ انتخاباتی چیست ؟

لازم است بخوبی فهمیده شود چه چیزی اینجا قاعده^۶ انتخاباتی نامیده می شود . یک مثال ساده ما را در این راه کمک خواهد کرد (۴) .

فرض کنیم دو نفر A و B و یک پیشنهاد p برای تصویب یارد داریم . چهار حالت ممکن است اتفاق بیفتد : A و B هر دو تصویب یارد خواهند کرد یا A تصویب و B رد خواهد کرد ، یا A رد و B تصویب خواهد کرد .

در اینجا است که باید خوب فهمیده شود قاعده^۶ چیست : برای اعلام تصمیم جمعی در این چهار حالت ، شانزده قاعده امکان پذیر است . فی المثل ، گفته خواهد شد که تصمیم جمعی " بلی " است اگر A و B هر دو " بلی " بگویند ، یا اینکه تصمیم جمعی " بلی " است فقط در صورتی که لا اقل یکی از دو فرد " بلی " گفته باشد ، ولی همچنین می توان اعلام کرد که تصمیم جمعی " نه " است وقتی که هر دو نفر A و B " بلی " گفته باشند ، یا آنکه لا اقل یکی از آنها " بلی " گفته باشد . بنابراین باز هم چهار حالت داریم . همچنین می توان اعلام کرد که انتخاباتی جوابهای و هر چه باشد ، تصمیم جمعی " بلی " است ، یا اینکه هر چه باشد تصمیم جمعی " نه " خواهد بود ، یا اینکه هنوز امکان این هست که اعلام شود تصمیم جمعی با انتخاب A مطابق خواهد بود یا اینکه با انتخاب B ، یا اینکه تصمیم جمعی مخالف انتخاباتی A یا B خواهد بود .

در اینجا ماده قاعده^۶ ممکن را بر شمردیم . در جدول کامل صفحه بعد علامت + یعنی تصویب یا " بلی " و علامت - یعنی رد یا " نه " .

4- Cf. G. Th. Guilbaud, " Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", *Economie appliquée*, 6 (1) 1952, pp. 552-553.

۱۶ قواعد	چهار حالت B و A				
		++	+-	-+	--
۱		+	+	+	+
۲		+	+	+	-
۳		+	+	-	+
۴		+	+	-	-
۵		+	-	+	+
۶		+	-	+	-
۷		+	-	-	+
۸		+	-	-	-
۹		-	+	+	+
۱۰		-	+	+	-
۱۱		-	+	-	+
۱۲		-	+	-	-
۱۳		-	-	+	+
۱۴		-	-	+	-
۱۵		-	-	-	+
۱۶		-	-	-	-

آنچه با کلمات بیان کرده بودیم در این جدول با علائم می بینیم .
 مخصوصاً " قواعد (۱) و (۱۶) برای اعلام تصمیم جمعی هیچ اعتنایی به عقاید A و B
 ندارد . با این قواعد می توان گفت که تصمیم جمعی " تحمیلی (imposee)
 است .

قاعده (۴) فقط به عقیده A توجه دارد و قاعده (۶) فقط به عقیده B .
 چنین قواعدی که تصمیم جمعی را وابسته به عقیده یک فرد تنهایی کند قواعد " استبدادی "
 (dictatorial) نامیده می شود .

چنانکه ملاحظه خواهیم کرد ، در میان شرایطی که باید در قواعد تصمیم جمعی
 منظور شود تا نه " نامعقول " باشد و نه " حیرت انگیز " ، ارو پیشنهاد می کند که این
 تصمیم نه " تحمیلی " باشد و نه " استبدادی " .

حال مسئله دیگر محدود به دو فرد نیست که میان ۲ "انتخاب" (option) یکی را انتخاب کنند ، بلکه از n فرد دعوت می شود که میان P "انتخاب" یکی را انتخاب کنند (ارو مسئله را با ۳ امکان انتخاب تشریح می کند) .

نباید منتظر یک تشریح ساده بود . در حالتی که شرح آن گذشت ۲ انتخاب کننده بود و ۲ انتخاب برای انتخاب کردن و دیدیم که ۱۶ قاعده وجود داشت . اما در حالتی که ۳ انتخاب باشد که ۳ انتخاب کننده باید از میان آنها انتخاب کنند ، شماره قواعد ممکن برابر است با : $2 \times 10^{2446} = (13^3) \times 13$ یعنی ۲ و ۲۴۰۰ صفر در جلویش . یک صفحه تمام برای نوشتن همه ارقام این عدد لازم است . مقدار این عدد تقریباً برابر است با تعداد ملکولهای موجود در کهکشان ما (تعداد ملکولهای کره زمین اندکی کمتر 10^{50} است) . بارای ارو n انتخاب کننده در نظر می گیرد $n \gg 3$. تعداد قواعد ممکن باز هم بیشتر است .

ارو ابتدا همه ترتیبهایی را که هر انتخاب کننده می تواند میان انتخابهایی که به او پیشنهاد شده است بدهد تعیین می کند . این ترتیبها "بر پایه دو" (binaires) است : یعنی هر انتخاب کننده ای میان انتخابهایی که ۲ به ۲ مرتب شده انتخابها یش را انجام می دهد . این انتخابها همچنین "متعدی" (transitif) هستند ، یعنی " دورانی" (Circulaire) نیستند . بالاخره انتخابها " کامل" (Complet) هستند ، یعنی اینکه هر یک از ۳ انتخاب موضوع یک انتخاب در رابطه با تمامی انتخابهای دیگر است .

پس از آنکه همه ترتیبهای فردی انجام شد ، از آن ترتیبهای محتمل برای گروه انتخاب کننده ها نتیجه می شود . در رابطه با این ترتیبهای محتمل برای گروه است که ارو " تابع انتخاب اجتماعی" (Fonction de Choix Social) را تعریف می کند . این تابع عبارت است از قاعده مناسب برای همه حالات که تعیین یک ترتیب اجتماعی را بر مبنای هر توالی n ترتیب میسرمی سازد و هر یک از این n ترتیبها فی نفسه معرف عقیده یکی از n انتخاب کننده است .

به عبارت دیگر ، تابع انتخاب اجتماعی قاعده‌ای است که اجازه می دهد از شناخت ترجیحات انفرادی (ارزشهای انفرادی) به تعیین اراده عمومی (انتخاب اجتماعی) رسید .

تابع انتخاب اجتماعی مطلوب باید یک تابع انتخاب معقول باشد . فی المثل اگر اتفاق آراء انتخاب x را ترجیح می دهد ، نا معقول خواهد بود که گفته شود انتخاب جمعی به y متمایل است .

ملاحظه می شود که تعدادی تنگنا ، لااقل به صورت مکنون ، در قاعده‌ای که می باید انتخاب جمعی را تعیین کند وجود دارد .

اهمیت کار ارو در این است که پنج تا از این تنگناها را معلوم کرده است ، تنگناهایی به ظاهر بی اهمیت که همیشه به هنگام تعیین اراده جمعی تلویحا " یا تصریحا " پذیرفته شده اند ، ولی در واقع بسیار محدود کننده اند زیرا اگر همه آنها رعایت شود هیچ تابع انتخاب اجتماعی وجود نخواهد داشت . قضیه ارو همین جاست . با پنج تنگنای بی اهمیت که یقینا " در همه حالات تعیین انتخاب اجتماعی پذیرفته می شود ، هیچ قاعده‌ای برای تعیین انتخاب اجتماعی و هیچ قانون اساسی ای که بتوان پیش از رای گیری وضع کرد ، وجود ندارد .

برای بیان این پنج تنگنا که تعداد قواعد را در میان مجموع قواعد محتمل ، محدود می کند اول با تنگنای چهارم و پنجم ، بر حسب نظمی که خود ارو قائل شده است ، شروع می کنیم .

ارو شرط چهارم خود را چنین بیان می کند : "تابع انتخاب اجتماعی نباید تحمیلی باشد . معنایش این است که نتیجه رای گیری نباید بدون اعتنا به ترجیحات انتخاب کنندگان ، از پیش مشخص شده باشد . در حالت ساده شده‌ای که قبلا "ارائه شد ، معنایش این است که قاعده (۱) و قاعده (۱۶) منتفی هستند .

شرط پنجم این است که قاعده نباید "استبدادی" باشد . این شرط قواعد (۴) و (۶) مثال قبلی را منتفی می کند که در آنها نتیجه انتخابات فقط در گرو رای یک انتخاب کننده بدون اعتنا به انتخابهای انتخاب کنندگان دیگر است .

شرط دوم که شرط یکنواختی (*monotonie*) نامیده شده مستلزم آن است که هرگاه قاعده برای انتخاب اجتماعی رتبه‌ای برای انتخابی با رتبه بندی ای جمعی در پی داشته باشد ، اگر لااقل یکی از انتخاب کنندگان این انتخاب را در ردیف ترجیحات خود بالا برد این انتخاب یا مرتبه‌اش را حفظ کند یا مرتبه بهتری کسب کند .

یک شرط دیگر (شرط سوم ارو) این است که وقتی همه انتخاب کنندگان در باره همه انتخابها نظر خویش را بیان کردند، اگر یکی از انتخابها در موقع تعیین رتبه بندی جمعی حذف گردد، رتبه بندی اجتماعی نسبی انتخابهای باقیمانده تغییری نخواهد کرد (این شرط عدم وابستگی نسبت به خارج است).

بالاخره شرط یکم این است که همه ترجیحات انتخاب کنندگان میان انتخابهای x و y و z پذیرفته شده باشد.

۳- ماهیت استدلال

چنانچه ۵ تنگنا پذیرفته شود ارو بطوری که قبلا " هم گفتیم، نشان می دهد که هیچ قاعده ای، خواه قاعده اکثریت یا قاعده ارجحیتها یا قاعده نمره گذاری بوردا، و خلاصه هیچ یک از 10^{2500} قاعده پذیرفتنی نیست.

برای اینکه یک نتیجه خوب فهمیده شود، حدود و منطوقش دانسته شود، باید مکانیسم آن را فهمید، در اینجا یعنی استدلالش را. ولی برای اینکه تصویری از آن بدهیم باید ضمنا " مفهوم " مجموعه انتخاب کننده های تعیین کننده " برای یک زوج انتخاب را توضیح دهیم.

این زوج تشکیل شده است از دو انتخاب ممکن، مثلا " x و y ، از میان سه انتخاب (x و y و z) که انتخاب کنندگان باید مرتب کنند. یک قسمت A از همه انتخاب کننده ها برای انتخاب x در مقایسه با y تعیین کننده گفته می شود که اگر (و فقط اگر) x را همه انتخاب کننده های A به y ترجیح دهند، قاعده انتخابی اعلام می دارد که X به Y ترجیح داده شده است. ما خواهیم پذیرفت (و می توان آن را بر مبنای ۵ شرط بیان شده توسط ارو ثابت کرد) که:

فرضیه ۱: همیشه لااقل یک مجموعه تعیین کننده وجود دارد. این ممکن است اتفاق آراء، اکثریت کیفی، اکثریت ساده، یا هر مجموعه دیگر باشد بشرط آنکه تعریف مجموعه تعیین کننده مراعات شده باشد.

فرضیه ۲: لااقل یک مجموعه تعیین کننده بانفراات حداقل (minimum) وجود دارد.

فرضیه ۳: نفرات این مجموعه تعیین کننده اخیراً از یک بیشتر است .
 عبارت دیگر، یک انتخاب کننده به تنهایی نمی تواند تعیین کننده باشد ، یعنی تعیین کننده برای یک زوج انتخاب . در واقع ، آرو نشان می دهد که در چنین صورتی ، این یک انتخاب کننده برای تمامی زوجهای انتخابی تعیین کننده است و در این حالت انتخاب کننده " استبدادی " می شود ، و این نقیض شرط پنجم برای تعیین قاعده انتخاب اجتماعی است .

حال مطابق با فرضیه ۲ ، مجموعه تعیین کننده V را بانفرات حداقل فرض کنیم و در آن انتخاب کننده ها X را به Y ترجیح دهند . این مجموعه شامل K انتخاب کننده است ، K بنابه فرضیه ۳ ، میان ۲ و n قرار دارد ، و n تعداد کل انتخاب کننده ها است .

حال یک مجموعه V در نظر بگیریم ، یعنی قسمتی از مجموعه V ، که فقط شامل یک عضو باشد . این یک عضو X را به Y ترجیح می دهد چون عضو مجموعه V است که در آن همه افراد X را به Y ترجیح می دهند . ولی درباره ترجیحات دیگر اعضای مجموعه V چیزی گفته نشده است . بنا بر شرط ۱ آرو ، همه ترجیحات پذیرفتنی هستند . بنابراین می توان فرض کرد که این انتخاب کننده V ، Y را انتخاب کرده و آن را به Z ترجیح داده است و در نتیجه (بواسطه متعدی بودن) X را به Z ترجیح داده است .

مجموعه V را در نظر بگیریم ، یعنی مجموعه اعضای دیگر مجموعه V . آنها Z را به X ترجیح می دهند ، که نتیجه اش ترجیح Z به Y است .
 بالاخره مجموعه W را در نظر بگیریم که از بقیه انتخاب کننده هایی که عضو مجموعه V نیستند تشکیل شده است (ممکن است اساساً این مجموعه تهی باشد) . ما خود را در حالتی قرار می دهیم که در آن انتخاب کننده ها Y را به Z و Z را به X ترجیح می دهند ، که نتیجه آن ترجیح Y به X است .

همه اینها ، بطوری که ملاحظه می شود وضعیت را تشکیل می دهند که احتمال وقوع آن وجود دارد و با هیچ یک از شرایط ، هیچ یک از تعاریف ، و هیچ یک از فرضیه هایی که برشمردیم مانع الجمع نیست .

با توجه به مراتب فوق ، معلوم می گردد قاعده ای که بخواهد اعلام کند انتخاب اجتماعی xPz (X به Z ترجیح داده شده) است . قابل قبول نخواهد بود .

در واقع فقط عضو منحصر بفرد مجموعه V' ترجیح x به Z را انتخاب کرده است. این انتخاب کننده بنا بر این برای تمامی گروه تعیین کننده می شود. و مجموعه تعیین کننده حداقل را تشکیل می دهد. لکن، بنا بر فرضیه ۳، مجموعه تعیین کننده حداقل باید دو عضو داشته باشد. بنا بر این، انتخاب اجتماعی نمی تواند xPz باشد. از این نتیجه می شود که " x به z ترجیح داده نشده است " انتخاب اجتماعی است، یعنی اینکه انتخاب اجتماعی یکی از این دو حالت است: " z به x ترجیح داده شده است "، یا " z و x بطور مساوی پذیرفته شده اند ".

به این دو حالت باید انتخاب " x به y ترجیح داده شده است " را اضافه کنیم، در نتیجه $X \succ X \succ Z$ یعنی اینکه $Z \succ Y$. در حالی که فقط اعضای مجموعه V'' چنین انتخابی را کرده اند. نتیجتاً "مجموعه V'' برای Z به Y ترجیح داده شده است" تعیین کننده خواهد بود. لکن تعداد اعضای مجموعه V'' کمتر از مجموعه V است. حال آنکه ما مجموعه V را برای مجموعه تعیین کننده با حداقل اعضا فرض کرده ایم. بنا بر این ZPy بعنوان انتخاب اجتماعی قابل قبول نیست. لذا نمی توان X را با z مقایسه کرد، و در حالتی که ما خود را قرار داده ایم، قاعده ای برای تعیین انتخاب اجتماعی وجود ندارد (۵).

با چنین روشی است که ارو به استدلال خود تا پایان ادامه می دهد: روشی که هر مرحله آن، بطوری که ملاحظه شد، بسیار ساده لکن در نهایت بسیار پیچیده است چون مراحل متعددند.

۵- انتخاب اجتماعی نمی تواند جز اینها باشد: xyz, xzy, zxy که به ترتیب، ترتیبی است که مجموعه های V' و V'' و W داده اند. زیرا سه ترتیب ممکن دیگر، ترتیب داده کسی نیست و انتخابهای تحمیلی هستند. اگر برای انتخاب اجتماعی ترتیب xyz از مجموعه V' انتخاب شود، استبدادی خواهد بود، که با شرط ۵ متناقض است. اگر zxy انتخاب شود، مجموعه V'' تعیین کننده خواهد بود، در حالی که V'' اعضای کمتر از مجموعه V' است، و V'' بعنوان مجموعه تعیین کننده حداقل اعضا فرض شده است. و بالاخره اگر انتخاب اجتماعی yzx باشد، مجموعه V دیگر برای زوج انتخاب x ، y تعیین کننده نیست، زیرا در این حال y به X ترجیح داده شده است. بنا بر این در حالت مورد نظر نمی توان قاعده ای برای انتخاب اجتماعی اعلام کرد.

در هر حال ، نتیجه آن روشن است . از پارادکس کندرسه تا قضیه ارو ، پیوسته در جهت افزایش دقت پیشرفت حاصل شده است ، و به این نتیجه رسیده ایم که هیچ قانون انتخاباتی ، هیچ قانون اساسی ، هیچ " قاعده " ای اجازه نمی دهد تضمین کنیم که همیشه می توان اراده عمومی را بدون برخورد با وضعیتهای غیر منطقی ، بیمعنی و متناقض تعیین کرد .

ترجمه عبدالحسین نیک گهر